

11.2.1 Číselné obory, číselná osa, množiny, intervaly

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Přípravy na státní maturitu jsem dlouhou dobu prakticky ignoroval s tím, že požadavky u SM jsou daleko menší než na naší škole a každý student, který se dostane do maturitního ročníku na naší škole, by měl státní maturitu udělat. Ještě více mě od SM vzdálilo, když naše škola kvůli tehdy plánované povinné SM z matematiky zavedla speciální opakovací předmět CMP. V mých třídách ho dvakrát po sobě učili kolegové a tak šla příprava na SM zcela mimo mě. Poprvé jsem CMP učil až v roce 2022/2023. Systém, který jsem zvolil je následující. Na začátku si napíšeme zkušební test v podmínkách, které se blíží podmínkám maturity (časový limit 100 minut, tabulky, kalkulačky). Test opravím, žáci si udělají opravu.

Následuje práce s hodinami uvedenými v této kapitole. Prošel jsem zpětně maturitní testy z uplynulých let a vypsalsi k sobě příklady, z podobného tématu. Poté jsem k nim nageneroval analogické příklady (které obsahují hodiny v této kapitole). Na každou hodinu dostanou žáci za úkol vytvořit krátké shrnutí, které se týká látky z dané kapitoly (v hodině ho náhodně kontrolujeme). Znalosti, které se ukazují být největším problémem, se snažím přidávat na začátky následujících hodin.

Didaktický test státní maturity z matematiky se liší od obvyklé podoby testů, se kterými se setkává většina žáků ve většině škol. Test sice pokrývá jen část učiva, které se probírá na gymnáziích, (a proto je „lehčí“), na druhé straně obsahuje jen málo „typových“ úloh, které se předtím ve stejné nebo jen málo odlišné podobě probírají v hodinách. Navíc se příklady v jednotlivých testech liší od sebe navzájem a to, že se naučíš nazpaměť řešení posledních dvou testů z minulého roku, nijak podstatně nezvyšuje šanci, že uspěješ v letošním testu. Tady se neopakuje typický vzor ze škol, kde test často obsahuje většinu příkladů spočítaných v hodinách (jen s jinými čísly) a opravná verze C je téměř totožná s původními verzemi A, B.

Velmi špatnou strategií přípravy opakované řešení testů z minulých let bez odpovídajícího rozboru chyb. Zda Ti řešení dalších a dalších testů pomáhá, si konec konců můžeš snadno ověřit tím, jak se mění Tvoje výsledky. Pokud se Tvé skóre systematicky nezlepšuje, jde o ztrátu času, ze které můžeš mít maximálně dobrý pocit, že něco děláš.

Jak se připravit na didaktický test státní maturity.

Pokud máš dost času (je listopad a ještě se můžeš rozhodnout, z čeho budeš maturovat) doporučuji následující:

Napiš si za podmínek, které se nejvíc blíží maturitní realitě, test z posledního dostupného termínu. Dále záleží na výsledku:

- cca 9 bodů a méně: tady by bylo asi nejrozumnější zvolit místo matematiky angličtinu. Za pět měsíců se samozřejmě dá naučit na maturitu z matematiky z téměř ničeho, ale bude to dřina a spousta času.
- 10 – 20 bodů: slušná šance maturitu zvládnout, stačí odpovídající příprava. **POZOR:** skutečnost, že jednou uděláš test za 20 bodů neznamena, že příště dopadneš stejně. Každý test je trochu jiný a proto se Tvé výsledky v dalším testu mohou lišit klidně o 5 bodů oběma směry, aniž by ses naučil cokoliv nového. Dále záleží na tom, kde jsi nasbíral většinu svých bodů:

- Pokud většina Tvých bodů pochází z příkladů v podstatě základoškolských (procenta, slovní úlohy, rovnice, vyjádření neznámé ze vzorce, ...) je Tvoje výchozí pozice dobrá v tom, že dokážeš matematice rozumět, máš solidní základ a jen Tě nějak minula středoškolská matematika. Doučit se na test bys měl být schopen sám tím, že se naučíš ty části středoškolské matematiky, které se v maturitě objevují (lomené výrazy, jednoduché mocniny, elementární funkce, kvadratické rovnice a nerovnice, základy exponenciální funkce, jednoduché logaritmy, úvod do goniometrických funkcí, trigonometrie, obsahy a obvody obrazců, objemy a povrchy těles, rovnice přímky, úvod do analytické geometrie, posloupnosti, jednoduchá kombinatorika, statistika). Upozorňuji, že na toto doučení nebude vždy stačit obsah hodin v této kapitole (ty jsou psány pro žáky, kteří prošli předchozími díly učebnice) a budeš se muset v některých okamžicích do odpovídajících hodin podívat (s tím, že většinou nebudeš potřebovat projít celý obsah hodin, ale stačit budou pouze jednodušší úlohy).
- Pokud většina Tvých bodů pochází z typicky středoškolské látky, je situace horší v tom, že zřejmě matice moc nerozumíš a máš ji postavenou na chatrných základech. Lepší by bylo doučovat se s někým, kdo matematiku chápe a pozná, že často potřebuješ vysvětlit i zcela základní věci (fungování zlomku, princip použití neznámé, trojčlenku, ...). Hlavně se ale budeš muset naučit sám rozeznat, zda něčemu rozumíš (a víš, jak a proč to tak musí být) nebo nerozumíš (a opakuješ pouze nějaký postup, který pro Tebe není spojen s žádnou představou).
- 20 – 35 bodů: maturitu bys měl udělat. Pokud chceš i solidní výsledek, budeš potřebovat projít zbytek hodin v kapitole a občas se vrátit i do předchozích dílů.
- 35 a více. Bylo by dost překvapivé, kdybys maturitu nezvládl. Na doladění výsledku by Ti měla stačit aplikace a doporučení pro rychlou přípravu.

Pokud už je rozhodnuto, že maturitu z matematiky dělat budeš. Projdi postupně hodiny v této kapitole. Na úvod většiny z nich je uveden přehled nutných znalostí. Všechny jsou probrány v předchozích dílech a pokud připomenutí v přehledu nestačí k jejich znovuvybavení, je potřeba se vrátit k místu, kde byly probrány. Zbytek hodiny obsahuje úlohy analogické úlohám v maturitních testech z minulých let. Je dobré si příklady zkusit samostatně vyřešit, v případě problémů si nechat poradit řešením v hodině a hlavně se zabývat všemi chybami, které při řešení uděláš.

Pokud už čas není (méně než měsíc do testu): Napiš si test a projdi všechny příklady, které jsi neměl dobře. U každého příkladu je třeba najít zdroj chyby:

- přehlédnutí, numerická chyba, špatné opsání, ...: s tím, se špatně něco dělá. Obecně pomáhá mít něco napočítaného (s počtem vyřešených úloh klesá počet chyb, které děláme). Mnoha chyb si můžeme všimnout, když máme očekávání toho, jak úprava dopadne (přibližná velikost čísla, počet členů, celková mocnina členu, ...). Pokud při řešení testu zbývá na konci čas, je možné spočítat příklady s největším počtem úprav, ještě jednou nezávisle znova a porovnat výsledek.
- Neznalost konkrétního matematického postupu: se řeší nejjednodušeji tím, že se to člověk naučí. V tomto případě není třeba koukat na celé kapitoly, uť se rovnou konkrétní věci, které jsi neuměl (směrnice tvar rovnice přímky, kosinovou větu, vzorech pro sčítání logaritmů, ...).
- Neschopnost najít cestu k řešení (konkrétní matematické postupy jsem sice měl, ale nedokázal jsem s tím nic udělat): tady už pomáhá, že jsi se příklad pokusil vyřešit a že ses seznámil se správným řešením. Další pomocí je řešení jiných úloh na stejnou znalost (čím rozmanitější budou, tím větší bude jejich přínos) a hlavně přemýšlení o tom, jak

spolu všechny ty věci souvisí. Čím obecnější představu daného poznatku v hlavě máme, tím větší je okruh problémů, které s jeho pomocí dokážeme řešit. Po vyřešení všech chyb a doučení všech nalezených nedostatků, je možné napsat další test a kolečko zopakovat.

Jak postupovat při samotném řešení testu

Základním pravidlem je příliš se nezdržovat u žádného příkladu. Maturitní test má většinou 26 úloh, trvá 135 minut. Na jednu úlohu tak připadá přibližně 5,2 minuty. Při prvním průchodu testem, bys u žádné úlohy neměl strávit více než cca 2 minuty přemýšlením o tom, jak začít postupovat. Pokud Tě během těchto dvou minut nic nenapadne, přejdi na další úlohy, k nevyřešené se můžeš vrátit, když Ti zbude čas.

Složitost úloh

V maturitních testech se nevyskytují úlohy, které se nedají vyřešit během pěti minut. Pokud se situace při řešení začne komplikovat, objeví se vyšší než třetí mocniny neznámé, rovnice se nedá upravit na několika řádcích, s velkou pravděpodobností jsi někde udělal chybu, nebo ses vydal špatným směrem. Pokud tento příklad není poslední, který Ti zbývá vyřešit, přeruš svou práci a zabývej se jinou částí testu. Pokud Ti na konci zbude čas, můžeš se vrátit, ale výhodnější je zkusit příklad začít řešit znova než se snažit rozmotat nezvykle složitou situaci.

Přehled potřebných znalostí

Číselné obory (každý obor je podmnožinou následujícího):

- přirozená čísla (N): vyjadřují počet objektů,
- celá čísla (Z): můžeme vyjádřit i dluhy
- racionální čísla (Q): můžeme vyjádřit i části celku,
- reálná čísla (R): můžeme vyjádřit libovolnou vzdálenost,
- komplexní čísla (C): v oboru komplexních čísel má řešení každá algebraická rovnice.

Množinové operace

Průnik množin ($\cap$)

Průnik množin A, B (zapisujeme $A \cap B$) je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin.

Sjednocení množin ($\cup$)

Sjednocení množin A, B (zapisujeme $A \cup B$) je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A, B .

Rozdíl množin A, B ($A \setminus B$)

je množina všech prvků A , které nejsou prvky množiny B .

Intervaly (podmnožiny reálných čísel)

Uzavřený interval: Například čísla 2, 5 a všechno mezi nimi: $B = \{x \in R; 2 \leq x \leq 5\} = \langle 2; 5 \rangle$

Otevřený interval: Například všechno mezi čísly 2 a 5: $C = \{x \in R; 2 < x < 5\} = (2; 5)$.

Př. 1: Z je množina všech celých čísel, $A = \langle -2; 3 \rangle$. Urči všechny prvky množiny $A \cap Z$.

1 bod

$$A \cap Z = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

Př. 2: Je dána množina $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ a interval $B = \langle 2; 4 \rangle$. Uveď všechny prvky množiny A , které nepatří do průniku $A \cap B$. **1 bod**

Platí: $A \cap B = \{2; 3\} \Rightarrow$ prvky množiny B , které nepatří do průniku $A \cap B$ jsou: 0; 1; 4; 5.

Př. 3: M je množina všech reálných čísel, která splňují současně dvě podmínky:
 - číslo je větší než -3 ,
 - absolutní hodnota čísla je menší nebo rovna 4.
 Zapiš množinu M intervalem. **1 bod**

Zapíšeme obě podmínky pomocí intervalů:

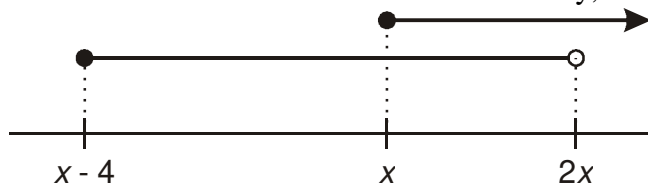
- podmínku „číslo je větší než -3 “ splňují čísla v intervalu $(-3; \infty)$,
- podmínku „absolutní hodnota čísla je menší nebo rovna 4“ splňují čísla v intervalu $\langle -4; 4 \rangle$.

Obě podmínky splňují čísla, která leží v průniku těchto dvou intervalů, tedy čísla v intervalu $(-3; 4)$.

Př. 4: Je dán interval $A = \langle -4; 4 \rangle$ a množina $B = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x < 7\}$. Urči $A \cap B$. **1 bod**

$$A \cap B = \langle -2; 4 \rangle$$

Př. 5: Na číselné ose jsou znázorněny intervaly A, B . Platí: $A \cup B = \langle -1; \infty \rangle$. Zapiš intervalem $A \cap B$. Meze intervalu uveď čísla, nesmějí obsahovat proměnnou x .



1 bod

Pokud je sjednocením obou intervalů interval $\langle -1; \infty \rangle$ platí $x - 4 = -1 \Rightarrow x = 3$.

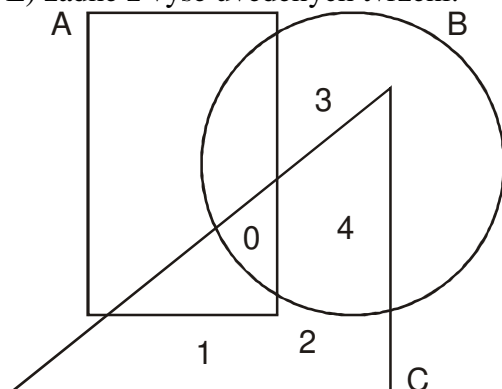
Průnikem obou intervalů je tedy interval $\langle x; 2x \rangle = \langle 3; 6 \rangle$.

Př. 6: Na obrázku jsou množiny A, B, C .

Množina A obsahuje všechna čísla uvnitř obdélníku, množina B všechna čísla uvnitř kruhu a množina C všechna čísla uvnitř trojúhelníku. Sjednocením všech tří množin je pětiprvková množina $\{0; 1; 2; 3; 4\}$. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

- A) $A = \emptyset$ B) $A \cap B = \emptyset$ C) $A \cap C = \emptyset$ D) $A \cap B \cap C = \emptyset$

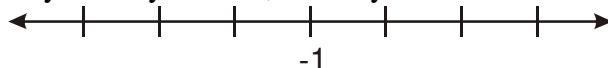
E) žádné z výše uvedených tvrzení.



2 body

Číslo 0 se nachází v průniku všech tří množin, z toho je zřejmé, ani jedna možnost A) až D) nemůže být správná a správná je tedy možnost E).

Př. 7: Na číselné ose je vyznačeno 7 bodů, z nichž jeden jej obraz čísla -1. Právě tři ze zbývajících šesti vyznačených bodů představují obrazy čísel x , y , z , které splňují následující podmínky: $1 > -x$, $y < x$, $-z < -x$. Obtáhni modře všechny z vyznačených bodů, ve kterých může ležet obraz čísla y . Zakroužkuj červeně ty z vyznačených bodů, ve kterých může ležet obraz čísla z .

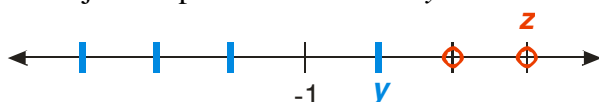


1 bod

Přepíšeme si nerovnosti tak, abychom porovnali čísla mezi sebou:

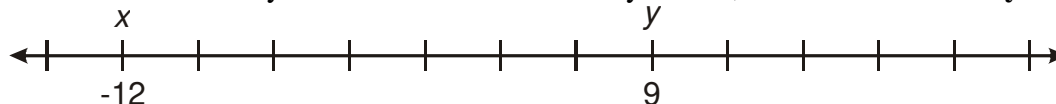
- $1 > -x \Rightarrow -1 < x$
- $y < x$
- $-z < -x \Rightarrow z > x$

$\Rightarrow$ najednou platí $-1 < x < z$ a $y < x < z \Rightarrow$ můžeme označit body na ose:



Př. 8: Na číselné ose je vyznačeno 14 stejných dílků a obrazy čísel $x = -12$, $y = 9$. Pro čísla a , b platí: číslo b je dva a půl krát větší než číslo a a zároveň číslo a je o 9 menší než číslo b . Vyznač na číselnou osu obrazy čísel a , b .

2 body



Nejdříve musíme zjistit velikost jednoho dílku stupnice (evidentně není jedna).

Mezi čísly -12 a 9 je na ose 7 dílků, které představují číselný rozdíl $9 - (-12) = 21 \Rightarrow$ na

jeden dílek představuje číselný rozdíl $\frac{21}{7} = 3$.

Podmínky pro čísla a , b přepíšeme do rovnic:

- Číslo b je dva a půl krát větší než číslo a : $b = 2,5a$,
- číslo a je o 9 menší než číslo b : $a = b - 9$.

Řešíme soustavu rovnic, například z druhé dosadíme do první: $b = 2,5(b - 9)$ $/ : 2$

$$2b = 5(b - 9)$$

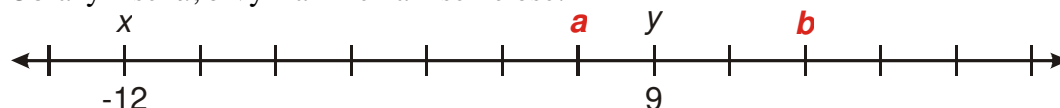
$$2b = 5b - 45 \quad / -2b + 45$$

$$45 = 3b \quad / : 3$$

$$b = 15$$

Dopočteme: $a = b - 9 = 15 - 9 = 6$.

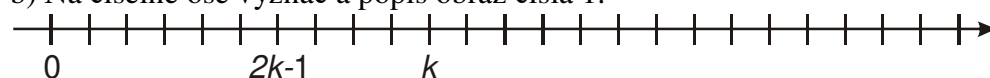
Obrazy čísel a, b vyznačíme na číselné ose:



Př. 9: Na číselné ose jsou obrazy tří čísel 0, k a $2k - 1$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé.

a) Vyjádři poměr $(2k - 1) : k$.

b) Na číselné ose vyznač a popiš obraz čísla 1.



2 body

a) Vyjádři poměr $(2k - 1) : k$.

Mezi obrazem čísla $2k - 1$ a obrazem čísla 0 je šest dílků, mezi obrazem čísla k a obrazem čísla je deset dílků $\Rightarrow (2k - 1) : k = 6 : 10 = 3 : 5$.

b) Na číselné ose vyznač a popiš obraz čísla 1.

Obraz čísla 1 určíme, pokud se nám podaří určit hodnotu čísla k . Výraz z předchozího bodu představuje rovnici pro k : $(2k - 1) : k = 3 : 5$

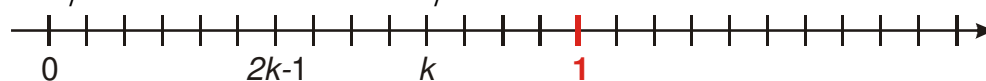
$$\frac{2k - 1}{k} = \frac{3}{5} \quad / \cdot 5 \cdot k$$

$$5(2k - 1) = 3k$$

$$10k - 5 = 3k \quad / +5 - 3k$$

$$7k = 5 \quad / : 7$$

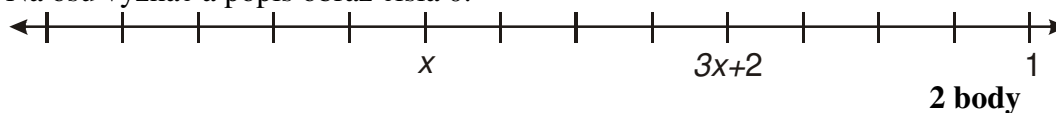
$$k = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{mezi obrazy čísel 0 a } \frac{5}{7} \text{ je deset dílků} \Rightarrow \text{jeden dílek na ose představuje } \frac{1}{14}.$$



Dodatek: Obraz čísla 1 je možné najít daleko elegantněji takto: k představuje na ose 10 dílků $\Rightarrow 2k$ musí představovat 20 dílků. Jestliže $2k - 1$ představuje 6 dílků, musí číslo 1 představovat $2k - (2k - 1) = 20 - 6 = 14$ dílků. Za nápad děkujeme Kristý.

Dodatek: Dobrou doplňující otázkou je bez výpočtu odhadnout, na které z částí, na které rozdělily osu obrazy čísel k a $2k - 1$ bude ležet obraz čísla 1.

Př. 10: Na číselné ose jsou obrazy tří čísel 1, x a $3x+2$. Vyznačené dílky jsou stejně dlouhé. Na osu vyznač a popiš obraz čísla 0.



2 body

Podobně jako v předchozím příkladu můžeme na ose odečíst počty dílků pro čísla:

- $1 - (3x + 2)$: 4 dílky,
- $1 - x$: 8 dílků.

Platí tedy: $\frac{1 - (3x + 2)}{1 - x} = \frac{4}{8}$

$$\frac{-1 - 3x}{1 - x} = \frac{1}{2} \quad / \cdot 2(1 - x)$$

$$2(-1 - 3x) = 1 - x$$

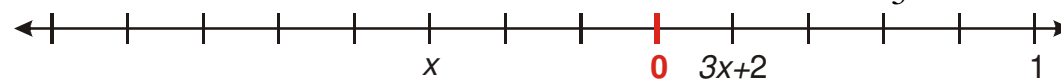
$$-2 - 6x = 1 - x \quad / +6x - 1$$

$$-3 = 5x \quad / : 5$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

$$3x + 2 = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 2 = \frac{-9 + 10}{5} = \frac{1}{5}$$

Mezi obrazy čísel x a $3x+2$ jsou čtyři dílky $\Rightarrow$ 1 dílek představuje $\frac{1}{5}$.



Shrnutí: